Teorema della funzione inversa

Una versione generalizzata del teorema di Dini

Proposizione 1. *Sia $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e tale che*
$$F(0,0)=0 \qquad e \qquad \partial_x F(0,0)\neq 0.$$
Allora esistono $L>0$, $T>0$, $A>0$ ed una funzione
$$\eta:[-L,L]\times(-T,T)\to\mathbb{R}$$
tale che:

(i) *Per ogni $\ell\in[-L,L]$ e per ogni punto $(x,y)\in(-A,A)\times(-T,T)$, si ha che*
$$F(x,y)=\ell \qquad \text{se e solo se} \qquad x=\eta(\ell,y).$$

(ii) *La funzione di due variabili η è continua in $[-L,L]\times(-T,T)$ e di classe C^1 in $(-L,L)\times(-T,T)$.*

Dimostrazione:

- Scegliamo prima $A>0$ in modo tale che
$$\partial_x F(x,y)>0 \qquad \text{per ogni} \quad (x,y)\in(-A,A)\times(-A,A).$$
- Siccome $F(0,0)=0$ e la funzione $x\mapsto F(x,0)$ è crescente, abbiamo che
$$F(A,0)>0 \qquad \text{e} \qquad F(-A,0)<0.$$
- Per la continuità di F, esiste $T\in(0,A)$ tale che
$$F(A,y)>0 \qquad \text{per ogni} \quad y\in[-T,T];$$
$$F(-A,y)<0 \qquad \text{per ogni} \quad y\in[-T,T].$$
- Definiamo $L>0$ come il più piccolo fra
$$\min_{y\in[-T,T]} F(A,y) \qquad \text{e} \qquad \min_{y\in[-T,T]} |F(-A,y)|.$$
- **Costruzione di η.** Osserviamo che, fissati $\ell\in(-L,L)$ e $y\in(-T,T)$, esiste un unico $x\in(-A,A)$ tale che $F(x,y)=\ell$. Questo x sarà per definizione $\eta(\ell,y)$.
- **Continuità di η.** Siano ℓ_n e y_n due successioni convergenti, rispettivamente in $(-L,L)$ e $(-T,T)$, con limiti
$$\ell_\infty\in(-L,L) \qquad \text{e} \qquad y_\infty\in(-T,T).$$
Inoltre, definiamo
$$\eta_\infty=\lim_{n\to\infty}\eta(\ell_n,y_n).$$
Per definizione di η, abbiamo che
$$F(\eta(\ell_n,y_n),y_n)=\ell_n.$$
Usando la continuità di F, abbiamo che
$$F(\eta_\infty,y_\infty)=\ell_\infty.$$
Per definizione quindi abbiamo che
$$\eta_\infty=\eta(\ell_\infty,y_\infty),$$
il che dimostra la continuità di η.

- **Derivabilità di η in ℓ.** Fissiamo

$$\ell \in (-L, L) \qquad \text{e} \qquad y \in (-T, T).$$

Allora, abbiamo che per ogni δ di modulo abbastanza piccolo si ha

$$F(\eta(\ell+\delta), y) = \ell + \delta.$$

Usando la differenziabilità di F e la continuità di η, abbiamo che esiste una funzione $r(\delta)$ tale che $\lim\limits_{\delta\to 0} r(\delta) = 0$ e

$$F(\eta(\ell+\delta), y) = F(\eta(\ell), y) + \Big(\eta(\ell+\delta, y) - \eta(\ell, y)\Big)\partial_x F\big(\eta(\ell, y), y\big) + r(\delta)\Big(\eta(\ell+\delta, y) - \eta(\ell, y)\Big).$$

Dividendo per δ, abbiamo che

$$1 = \Big(\partial_x F\big(\eta(\ell, y), y\big) + r(\delta)\Big)\frac{\eta(\ell+\delta, y) - \eta(\ell, y)}{\delta}.$$

Di conseguenza esiste

$$\partial_\ell \eta(\ell, y) = \lim_{\delta\to 0}\frac{\eta(\ell+\delta, y) - \eta(\ell, y)}{\delta} = \frac{1}{\partial_x F\big(\eta(\ell, y), y\big)}.$$

- **Derivabilità di η in y.** Come nel teorema della funzione implicita abbiamo che η è derivabile nella seconda variabile e

$$\partial_y \eta(\ell, y) = -\frac{\partial_y F\big(\eta(\ell, y), y\big)}{\partial_x F\big(\eta(\ell, y), y\big)}.$$

- **Differenziabilità di η.** Siccome le derivate parziali di η sono continue, abbiamo che η è differenziabile in ogni punto (ℓ, y) di $(-L, L)\times(-T, T)$. $\square$

Osservazione: Consideriamo gli insiemi

$$\Omega := \Big\{(x, y) \ : \ y \in (-T, T), \ \eta(-L, y) < x < \eta(L, y)\Big\},$$

$$\mathcal{R}_1 = (-L, L) \times (-T, T).$$

La mappa

$$\Phi : \Omega \to \mathcal{R}_1, \qquad \Phi(x, y) = \big(F(x, y), y\big),$$

è un diffeomorfismo tra Ω e $\mathcal{R}_1$. La sua inversa è la mappa

$$\Psi : \mathcal{R}_1 \to \Omega, \qquad \Psi(\ell, y) = \big(\eta(\ell, y), y\big).$$

Teorema della funzione inversa

Teorema 2 (Teorema della funzione inversa)**.** *Sia*

$$\Phi = (F, G) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

una funzione di classe C^1 e tale che

$$\Phi(0,0) = (0,0) \qquad e \qquad \det\begin{pmatrix}\partial_x F(0,0) & \partial_y F(0,0)\\ \partial_x G(0,0) & \partial_y G(0,0)\end{pmatrix} \neq 0.$$

Allora esistono un intorno aperto Ω di $(0,0)$, un rettangolo

$$\mathcal{R} = (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\delta, \delta),$$

ed una funzione $\Psi : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^2$, tali che:

(i) La mappa Ψ è di classe C^1 su $\mathcal{R}$

(ii) La mappa $\Phi : \Omega \to \mathcal{R}$ è bigettiva e $\Psi : \mathcal{R} \to \Omega$ è la sua inversa.

Dimostrazione: Senza perdita di generalità, supponiamo che $\partial_x F(0,0) > 0$. Sia $A > 0$ tale che

$$\partial_x F > 0 \qquad \text{e} \qquad \det\begin{pmatrix} \partial_x F & \partial_y F \\ \partial_x G & \partial_y G \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \text{in} \qquad (-A, A) \times (-A, A).$$

Usando il lemma precedente, esistono $L > 0$, $T > 0$ ed una funzione

$$\eta : (-L, L) \times (-T, T) \to \mathbb{R}$$

Consideriamo gli insiemi

$$\Omega := \Big\{(x, y) \ : \ y \in (-T, T),\ \eta(-L, y) < x < \eta(L, y)\Big\}.$$

e $\mathcal{R}_1 = (-L, L) \times (-T, T)$ e la mappa

$$\Phi : \Omega \to \mathcal{R}_1, \qquad \Phi(x, y) = \big(F(x, y), y\big).$$

Allora, la mappa Φ e bigettiva e la sua inversa

$$\Psi : \mathcal{R}_1 \to \Omega$$

è data da

$$\Psi(\ell, y) = \big(\eta(\ell, y), y\big).$$

In particolare, per ogni aperto

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{R}_1,$$

l'insieme

$$\Psi(\mathcal{A})$$

è aperto e la mappa

$$\Psi : \mathcal{A} \to \Psi(\mathcal{A}),$$

è bigettiva con inversa

$$\Phi : \Psi(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}.$$

Inoltre, entrambe le mappe Φ e Ψ sono di classe C^1.

Esempio 3. *La mappa*

$$\Phi : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \ : \ x > 0\}, \qquad \Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

è bigettiva e di classe C^1, con inversa di classe C^1.

Esempio 4. *La mappa*

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \qquad \Phi(t, \theta) = (e^t \cos\theta, e^t \sin\theta)$$

è tale che

$$\det \mathrm{J}\Phi > 0 \quad \textit{su} \quad \mathbb{R}^2,$$

ma non è bigettiva.